ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

В.Н.Худенко

К ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ МНОГОМЕРНЫХ КВАДРИК

В проективном пространстве P_n рассматриваются многообразия многомерных квадрик. Введены понятия ассоциированных характеристических многообразий различных рангов квадрики Q_p. Найдены условия, при которых квадрика многообразия обладает характеристическими точками второго ранга. Получены соотношения, определяющие порядок основного объекта многообразия.

В n-мерном проективном пространстве рассмотрим многообразия $(h,m,n)^2_p$ [1] многомерных квадрик Q_p $(1 \le p \le n-3)$. Уравнения квадрики Q_p записываются в виде:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \qquad (1)$$
$$x^a = 0,$$

причем $\det(a_{\alpha\beta}) = 1$.
Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения: $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, p+2$; $a, b = p+3, p+4, \dots, n+1$;

$s, t = 1, 2, \dots, m$; $i, j, k = 1, 2, \dots, h$; $(m \geq h)$.

Зададим многообразие $(h,m,n)^2_p$ параметрически с помощью системы уравнений:

$$\omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha i} \tau^i, \qquad (2)$$
$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta s} \tau^s,$$

где τ^i – инвариантные формы бесконечной аналитической группы преобразований m-мерного пространства параметров, удовлетворяющие системе уравнений

$$\mathcal{D}\tau^i = \tau^k \wedge \tau^i_k,$$
$$\mathcal{D}\tau^j_i = \tau^k_j \wedge \tau^i_k + \tau^k \wedge \tau^i_{jk},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathcal{D}\tau^i_{j_1 j_2 \dots j_r} = \sum_{s=1}^{r} \frac{r!}{s!(r-s)!} \tau^k_{(j_1 j_2 \dots j_s} \wedge \tau^i_{j_{s+1} \dots j_r)k} +$$
$$+ \tau^k \wedge \tau^i_{j_1 j_2 \dots j_r k}.$$

Продолженная система дифференциальных уравнений (2) запишется в виде:

$$\omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha i} \tau^i, \quad \Delta\Lambda^a_{\alpha i} = \Lambda^a_{\alpha i j} \tau^j,$$
$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta s} \tau^s, \quad \Delta\Lambda_{\alpha\beta s} = \Lambda_{\alpha\beta s t} \tau^t. \qquad (3)$$

Используя систему (3), получим следующие утверждения:

Теорема 1. Для того, чтобы основной объект многообразия $(h,m,n)^2_p$ имел порядок выше первого, достаточно, чтобы

$$C^2_{p+3} \cdot m + (n-p-1) h (p+2) < n^2 + 2n + m^2. \qquad (4)$$

Теорема 2. Для того, чтобы основной объект [2] многообразия $(h,m,n)^2_p$ имел порядок выше k, достаточно, чтобы

$$C^2_{p+3} \cdot (m + m^2 + \dots + m^k) + (n-p-1)(h + h^2 + \dots + h^k)(p+2) <$$
$$< n^2 + 2n + m^2 + m^3 + \dots + m^{k+1}.$$

Рассмотрим случай, когда $(p+1)$-мерная плоскость и квадрика Q_p описывают многообразия одинаковой размерности, т.е. когда

$$h = m.$$

В этом случае многообразие $(h,h,n)^2_p$ задается системой уравнений

$$\omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha i} \tau^i, \quad \theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i} \tau^i. \qquad (5)$$

О п р е д е л е н и е 1. Алгебраическое многообразие n-мерного проективного пространства P_n, определяемое системой уравнений

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0,\ x^a = 0,\ \Lambda_{\alpha\beta i} x^\alpha x^\beta = 0,\ \Lambda^a_{\alpha i} x^\alpha = 0, \quad (6)$$

называется характеристическим многообразием первого ранга (или просто характеристическим многообразием [3]) квадрики $Q_p \in (h,h,n)^2_p$.

Продолженная система (5) записывается в виде:

$$\omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha i} \tau^i,\quad \theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i} \tau^i, \quad (7)$$
$$\Delta \Lambda^a_{\alpha i} = \Lambda^a_{\alpha ij} \tau^j,\quad \Delta \Lambda_{\alpha\beta i} = \Lambda_{\alpha\beta ij} \tau^j,$$

где

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta i} = d\Lambda_{\alpha\beta i} - \Lambda_{\alpha\gamma i}\omega^\gamma_\beta - \Lambda_{\gamma\beta i}\omega^\gamma_\alpha - a_{\alpha\gamma}\Lambda^a_{\beta i}\omega^\gamma_a - a_{\gamma\beta}\Lambda^a_{\alpha i}\omega^\gamma_a + \frac{2}{p+2}\Lambda_{\alpha\beta i}\omega^\gamma_\gamma + \frac{2}{p+2} a_{\alpha\beta}\Lambda^a_{\gamma i}\omega^\gamma_a - \Lambda_{\alpha\beta k}\tau^k_i, \quad (8)$$

$$\Delta\Lambda^a_{\alpha i} = d\Lambda^a_{\alpha i} - \Lambda^a_{\gamma i}\omega^\gamma_\alpha + \Lambda^b_{\alpha i}\omega^a_b - \Lambda^a_{\alpha k}\tau^k_i.$$

О п р е д е л е н и е 2. Алгебраическое многообразие пространства P_n, определяемое системой уравнений:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0,\ x^a = 0,\ \Lambda_{\alpha\beta i} x^\alpha x^\beta = 0, \quad (9)$$
$$\Lambda_{\alpha\beta ij} x^\alpha = 0,\ \Lambda_{\alpha\beta ij} x^\alpha x^\beta = 0,$$

называется характеристическим многообразием второго ранга квадрики $Q_p \in (h,h,n)^2_p$.

Условие существования такой многомерной поверхности для невырожденных многообразий $(h,h,n)^2_p$ имеет вид:

$$n(h^2+h) \le (h^2+h+1)p. \quad (10)$$

В случае равенства в условии (10), система (9) определяет алгебраическое многообразие нулевой размерности порядка 2^{h^2+h+1}. Таким образом, имеет место следующая

Т е о р е м а 3. Если

$$n(h^2+h) = (h^2+h+1)p, \quad (11)$$

то каждая квадрика Q_p невырожденного многообразия $(h,h,n)^2_p$ обладает 2^{h^2+h+1} характеристическими точками второго ранга.

При $h=1$ условие (11) примет вид

$$2n = 3p.$$

Т е о р е м а 4. Одномерные невырожденные многообразия квадрик Q_p с характеристическими точками второго ранга существуют в пространствах P_n, где n кратно 3, а p – четное число.

Двумерные невырожденные многообразия $(2,2,n)^2_p$ квадрик Q_p с характеристическими точками второго ранга существуют в пространствах, где n кратно 7, а p делится на 6.

Аналогичным образом можно ввести характеристические многообразия ранга $\tau > 2$.

Список литературы

1. Х у д е н к о В.Н. О многообразиях многомерных квадрик проективного пространства.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.8,Калининград, 1977,с.126-134.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем. об-ва,1953,т.2, с.275-382.

3. Х у д е н к о В.Н. О многообразиях многомерных квадрик.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.10,Калининград,1979,с.135-140.